



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ - VÂLCEA

17.02.2018

CLASA A XI-A

SUBIECTUL 1

a) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

$$x_n = \{\sqrt{n^2 + 3n + 2}\} + \{\sqrt{n^2 + 5n + 6}\} + \{\sqrt{n^2 + 7n + 12}\}..$$

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Notăm cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a .

b) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

$$x_n = \sum_{k=0}^p \left\{ \sqrt{n^2 + (2k+1)n + k(k+1)} \right\} \quad \text{Arătați că } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (\sqrt{p}, p).$$

SUBIECTUL 2

Fie a, b, c numere întregi, nu toate nule și $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kc & a & b \\ kb & kc & a \end{vmatrix} = 0. \text{ Să se arate că numărul } k \text{ este cub perfect.}$$

Gazeta Matematica 2017

SUBIECTUL 3

Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Arătați ca următoarele două afirmații sunt echivalente:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1+\varepsilon}} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{1-\varepsilon}} = \infty$ (\forall) $\varepsilon > 0$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = 1$

SUBIECTUL 4

a) Fie $A \in M_n(R)$ și $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(R)$. Demonstrați că suma elementelor de pe fiecare

linie a matricei A este egală cu 2 dacă și numai dacă $A \cdot C = 2 \cdot C$.

b) Dacă $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B \in M_n(R)$ are proprietatea că $\sum_{j=1}^n b_{ij} = \lambda \in R$, (\forall) $i = \overline{1,n}$, arătați că suma elementelor de pe fiecare linie a matricei B^n este egală cu λ^n , (\forall) $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie $M = (m_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $M \in M_n(R)$, astfel încât $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 4$, (\forall) $i = \overline{1,n}$.

Aflați suma elementelor matricei M^4 .

Probleme selectate de prof. Drăghici Ana Maria

prof. Chișevescu Tatiana

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte

Toate subiectele sunt obligatorii